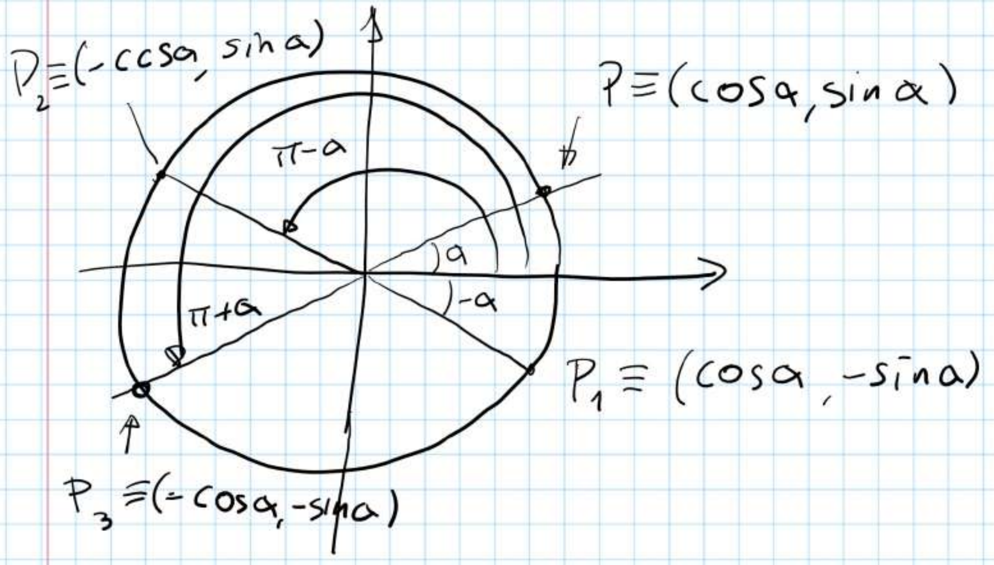
Angoli associati

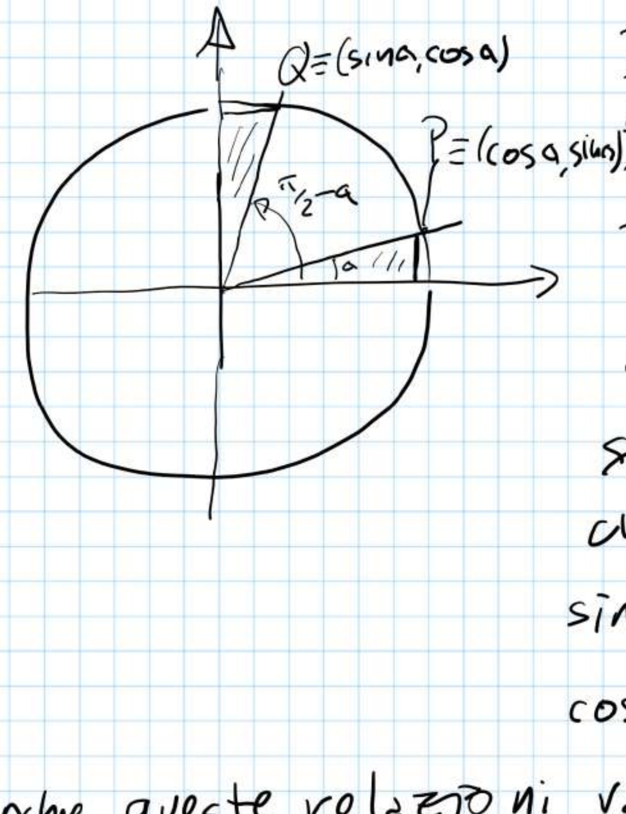


Abbiamo queste relazioni che valgono per a qualunque (anche se nel disegno ho preso α nel primo quadrante)

	sin	cos	tan
α	$\sin a$	$\cos a$	$\tan a$
$\pi - \alpha$	$\sin a$	$-\cos a$	$-\tan a$
$\pi + \alpha$	$-\sin a$	$-\cos a$	$\tan a$
$2\pi - a$	$-\sin a$	$\cos a$	$-\tan a$

Notiamo che $\tan(\alpha + \pi) = \tan \alpha$, dunque tan è periodica di periodo π (mentre sin e cos sono periodici di periodo π)

Angoli complementari: due angoli la cui somma è un angolo retto sono detti complementari



I due triangoli rettangoli evidenziati sono congruenti. Infatti hanno gli angoli congruenti e ipotenusa di lunghezza 1.

Si vede facilmente allora che

$$\sin(\pi/2 - \alpha) = \cos \alpha$$

$$\cos(\pi/2 - a) = \sin a$$

Anche queste relazioni valgono per a qualunque (non solo nel 1° quadrante)

Formule di addizione: dati due angoli a e β cosa posso dire di $a+\beta$.

$$\boxed{\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta) &= \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \\ \cos(\alpha+\beta) &= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta\end{aligned}}$$

Se volessi calcolare $\sin(\alpha-\beta)$ posso vederlo come caso particolare della formula precedente

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) =$$
$$\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

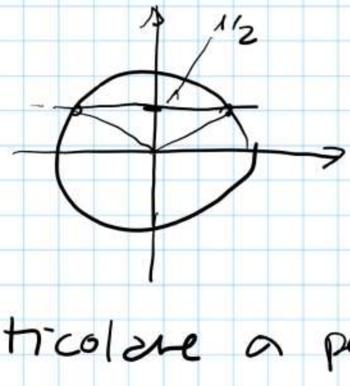
Ci sono altre formule che sono ovvie conseguenze delle precedenti

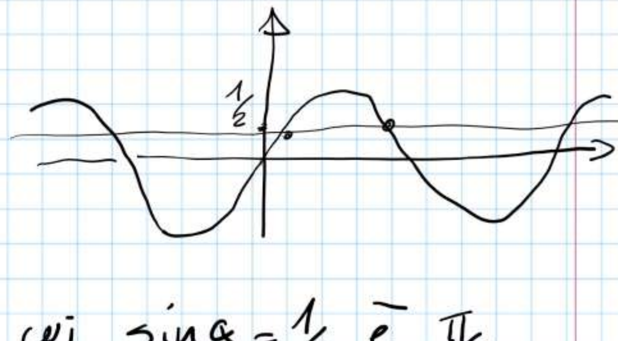
$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$$

$$\sin(2\alpha) = \sin(\alpha+\alpha) = \sin\alpha\cos\alpha + \cos\alpha\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$
$$\cos^2\alpha - (1-\cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 =$$
$$1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

Equazioni goniometriche

$$\sin x = \frac{1}{2}$$





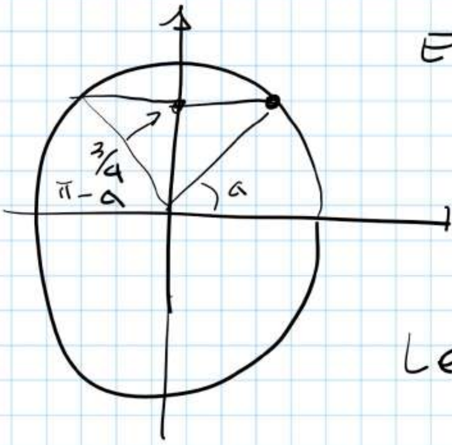
Un valore particolare a per cui $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ è $\frac{\pi}{6}$

Abbiamo poi che $\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$. Ma poi a questi due angoli possiamo sommare multipli di un angolo giro e ottenere così 2 famiglie di soluzioni

$$x = \pi/6 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$
$$x = 5/6\pi + 2k\pi$$

$\sin x = -3/2$ non ha soluzioni perchè $|-\frac{3}{2}| > 1$.

$\sin x = 3/4$

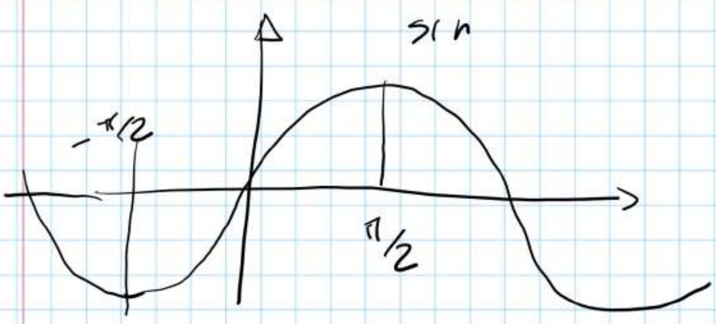


Esiste un angolo a nel primo quadrante tale che $\sin a = 3/4$. Inoltre $\sin(\pi - a) = \frac{3}{4}$

Le soluzioni sono allora

$$x = a + 2k\pi$$
$$x = \pi - a + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$ e a t.c. $\sin a = \frac{3}{4}$



Nell'intervallo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ la funzione sin assume tutti i valori compresi tra -1 e 1 esattamente una volta.

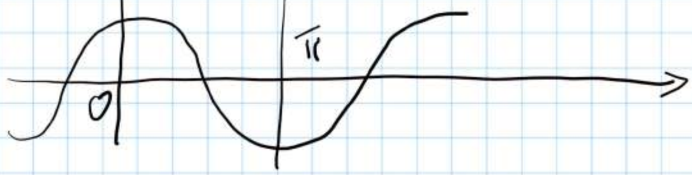
In altri termini sin definisce una biiezione da $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ a $[-1, 1]$. Dato allora $c \in [-1, 1]$ definiamo l'arcoseno di c (in formule $\arcsin c$) come l'unico angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ inclusi tale che $\sin(\arcsin c) = c$.

Ma allora $\sin x = \frac{3}{4}$ ha soluzioni

$$x = \arcsin \tfrac{3}{4} + 2k\pi$$

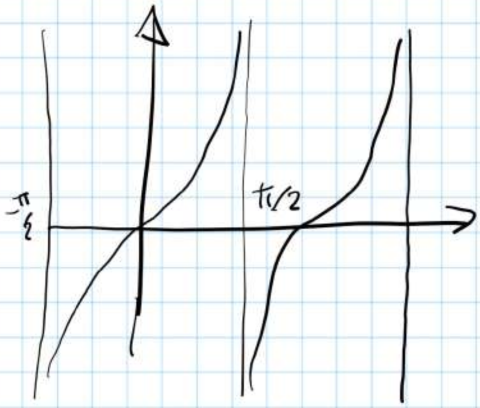
$$x = \pi - \arcsin \frac{3}{4} + 2k\pi$$

Per il coseno? e per la tangente?



$\arccos c$ è l'unico angolo compreso tra 0 e π t.c. $\cos(\arccos c) = c$

Anche l'arcocoseno è definito per $-1 \leq c \leq 1$



Dato un numero reale c, si definisce $\arctan c$ come l'unico angolo compreso tra $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ (esclusi) t.c.

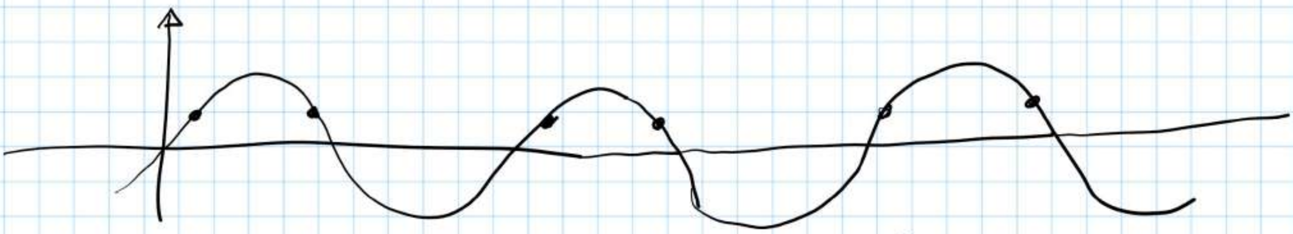
$$\tan(\arctan c) = c$$

Equazioni goniometriche elementari

* $\sin x = c$ se $|c| > 1$ l'equazione non ha soluzioni

se $|c| \leq 1$ l'equazione ha soluzioni divise in due famiglie

$$x = \arcsin c + 2k\pi$$
$$x = \pi - \arcsin c + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$



Se $c = 1$ o $c = -1$ le due famiglie coincidono

* $\cos x = c$ se $|c| > 1$ allora l'equazione non ha soluzioni

se $|c| \leq 1$ abbiamo le 2 famiglie

$$x = \arccos c + 2k\pi$$
$$x = -\arccos c + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

* $\tan x = c$ $\quad x = \arctan c + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

Esercizi

$$\sin\left(3x+\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Posso chiamare provvisoriamente $t=3x+\frac{4}{3}\pi$, posso risolvere l'equazione in t, $\sin t=\frac{\sqrt{3}}{2}$ e poi ricavare x in funzione di questi valori per t.

Sappiamo che $\sin(\pi/3)=\frac{\sqrt{3}}{2}$, dunque l'equazione in t ha soluzioni

$$t=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$t=\pi-\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

Abbiamo allora

$$3x+\frac{4}{3}\pi=\frac{\pi}{3}+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$3x+\frac{4}{3}\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

cioè

$$3x=-\pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$3x=-\frac{2}{3}\pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

cioè

$$x=-\pi/3+\frac{2k\pi}{3} \quad k\in\mathbb{Z}$$
$$x=-\frac{2}{9}\pi+\frac{2k\pi}{3} \quad k\in\mathbb{Z}$$

soluzioni periodiche di periodo $\frac{2}{3}\pi$

Errore tipico

Trovare le soluzioni base $-\pi/3$ e $-\frac{2}{9}\pi$ e poi scrivere

$$x=-\pi/3+2k\pi$$
$$x=-2/9\,\pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

Più in generale $\sin(cx+h)$ con $c \neq 0$ <u>non</u> è periodico di periodo 2π ma è periodico di periodo $\frac{2\pi}{c}$. Infatti

$$\sin\left(c\left(x+\frac{2\pi}{c}\right)+h\right) = \sin(cx+h+2\pi) = \sin(cx+h)$$

Analogamente per cos e tan

Equazioni omogenee

Esercizio $3\sin x - \cos x = 0$

Se $\cos x$, l'equazione si riduce a $3\sin x = 0$, cioè $\sin x = 0$. Ma non c'è nessun x per cui $\sin x = \cos x = 0$.

Possiamo assumere $\cos x \neq 0$ e dividendo per $\cos x$ troviamo l'equazion

$$3\frac{\sin x}{\cos x} - \frac{\cos x}{\cos x} = 0$$

cioè $3\tan x - 1 = 0$

vale a dire

$$\tan x = \frac{1}{3}$$

che ha soluzioni

$$x = \arctan\frac{1}{3} + k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

*Esercizio

$$\sin^2 x - \sin x \cos x - \frac{3}{4}\cos^2 x = 0$$

se $\cos x = 0$, l'equazione si riduce a $\sin^2 x = 0$, che ha soluzioni per $\sin x = 0$, ma, come prima, non c'è alcun angolo x t.c. $\sin x = \cos x = 0$.

Assumo $\cos x \neq 0$ e divide per $\cos^2 x$

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{\sin x \cos x}{\cos^2 x} - \frac{3}{4}\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

cioè

$\tan^2 x - \tan x - \frac{3}{4} = 0$

Ho un'equazione di 2° grado in $\tan x$ le cui soluzioni sono

$$\tan x = \frac{1 \pm \sqrt{1+3}}{2} = \begin{cases} 3/2 \\ -1/2 \end{cases}$$

Le soluzioni in x sono

$x = \arctan 3/2 + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

$x = \arctan(-1/2) + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$

* $\cos^2 x + \sin x \cos x = 2$

Uso la relezione pitagorica

$\cos^2 x + \sin x \cos x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$

cioè

$2\sin^2 x - \sin x \cos x + \cos^2 x = 0$

Come prima possiamo suppore $\cos x \neq 0$ e dividere per $\cos^2 x$, da cui ricaviamo

$2\tan^2 x - \tan x + 1 = 0$

che mi dà

$\tan x = \frac{1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ ← non ha soluzioni

* $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 1$

La relazione pitagorica non mi aiuta

Ricordiamo le formule di addizione

$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta$

In particolare, se scrivo

$\sin(\alpha + x) = \sin\alpha \cos x + \cos\alpha \sin x$

e considero α come una costante x come una variabile trovo una cosa del tipo

$u \cos x + v \sin x = \sin(\alpha + x)$

Se trovassi a tale che $\sin a = \sqrt{3}$ $\cos a = -1$
la mia equazione si ridurrebbe a
$\sin(a+x) = 1$. Ma non c'è nessun angolo
a tale che $\sin a = \sqrt{3}$ e $\cos a = -1$.
Proviamo così

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = C \sin(x+a)$$

Se trovo C e a che rendono vera questa
uguaglianza l'equazione si riduce a
$C\sin(x+a) = 1$ che so trattare.
Abbiamo

$$\sqrt{3}\cos x - \sin x = C \sin x \cos a + C\cos x \sin a.$$

Uguagliamo i coefficienti, trovo

$$\begin{cases} \sqrt{3} = C\sin a \\ -1 = C\cos a \end{cases}$$

Ma $\frac{C\sin a}{C\cos a} = \frac{\sqrt{3}}{-1}$, cioè $\tan a = -\sqrt{3}$.

So che esiste a t.c. $\tan a = -\sqrt{3}$: uno di tali
valori è $a = -\pi/3$. Sostituendo tale valore
nel sistema troviamo

$$\begin{cases} \sqrt{3} = C\sin(-\pi/3) \\ -1 = C\cos(-\pi/3) \end{cases}$$

cioè

$$\begin{cases} \sqrt{3} = C\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\ -1 = C\cdot\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases}$$

da cui segue $C = -2$ (bastava una delle
2 equazioni: ho usato tutte e 2 per controllo)

Pertanto $\sqrt{3}\cos x - \sin x = -2\sin(x - \frac{\pi}{3})$.

Dunque l'equazione si riduce a

$-2\sin(x-\frac{\pi}{3}) = 1$ cioè $\sin(x - \frac{\pi}{3}) = -\frac{1}{2}$

che ha soluzioni

$$x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$$
$$x - \frac{\pi}{3} = \frac{7}{6}\pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

cioè

$$x = \pi/6 + 2k\pi$$
$$x = 3/2\,\pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

* $\cos(x - \frac{\pi}{6}) - \sin(x - \frac{2}{3}\pi) = 1$ E' simile alla precedente (prima sviluppo)

$$\cos x \cos(-\tfrac{\pi}{6}) - \sin x \sin(-\tfrac{\pi}{6}) - \sin x \cos(-\tfrac{2}{3}\pi) - \cos x \sin(-\tfrac{2}{3}\pi) = 1$$

Facendo i calcoli troviamo

$$A\cos x + B\sin x = 1$$

e agiamo come prima

Esercizio

$$2\cos^2\left(\frac{3}{4}\pi - x\right) = \cos 2x$$

$$2\left(\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos(-x) - \sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin(-x)\right)^2 = \cos x\cos y - \sin x \sin x$$

$$2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)^2 = \cos^2 x - \sin^2 y$$

$$\cos^2 x - 2\sin\cos x + \sin^2 x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$2\sin^2 x - 2\sin x\cos x = 0$$

$2\sin x(\sin x - \cos x) = 0$

che ha soluzioni

$\sin x = 0 \vee \sin x - \cos x = 0$

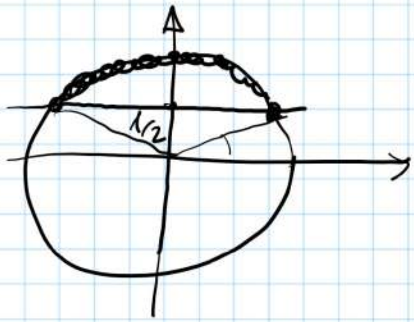
Da $\sin x = 0$ ricaviamo $x = 0 + 2k\pi$ $x = \pi - 0 + 2k\pi$
$k \in \mathbb{Z}$

cioe $x = k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

mentre $\sin x - \cos x = 0$ posso trattarla come sopra, assumendo $\cos x \neq 0$ (perché $\sin x = \cos x = 0$ non ha soluzioni) e dividendo per $\cos x$ trovo $\tan x - 1 = 0$ le cui soluzioni sono $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ $k \in \mathbb{Z}$

Disequazioni goniometriche

$\sin x \geq \frac{1}{2}$ Posso appoggiare le idee sulla circonferenza goniometrica o sul sul grafico



Devo prendere gli angoli corrispondenti all'arco evidenziato. Gli estremi corrisponderanno a valori dell'angolo x per cui $\sin x = \frac{1}{2}$

Ricordiamo che $\sin x = \frac{1}{2}$ ha soluzioni

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5}{6}\pi + 2k\pi$.

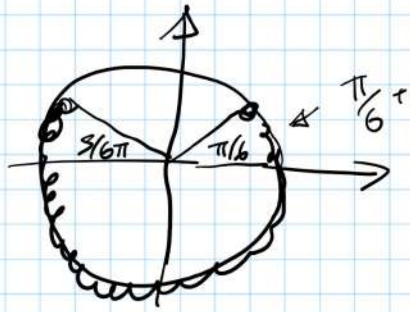
Gli estremi che devo prendere mi daranno i vari intervalli.

Posso scegliere come intervallo base $[\frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi]$. Dunque le soluzioni sono

$$\frac{\pi}{6}+2k\pi \le x \le \frac{5}{6}\pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}.$$

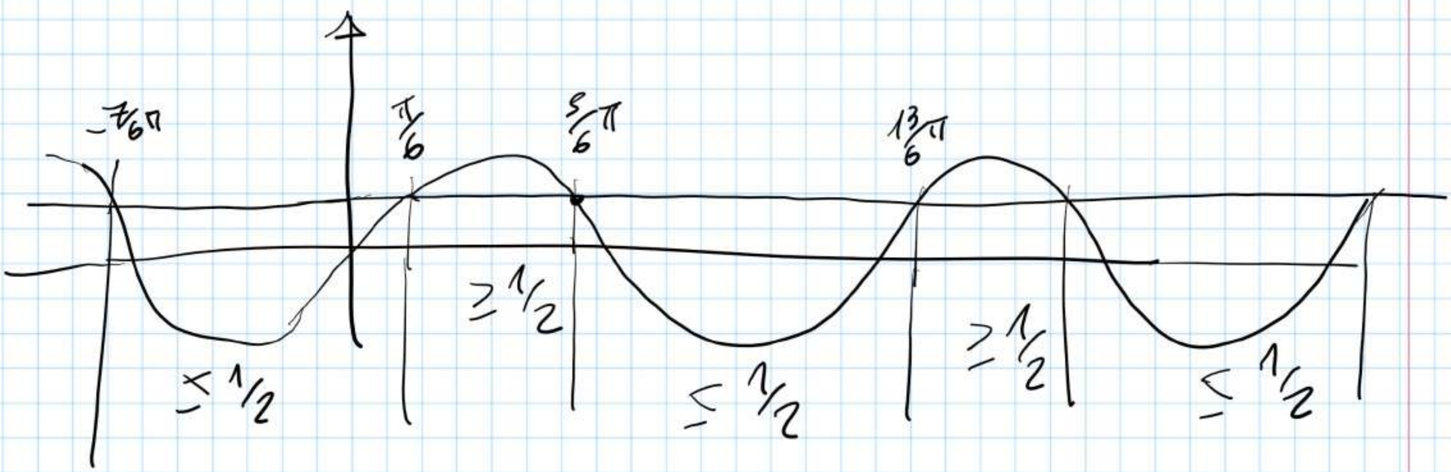
Devo fare attenzione

Se ad esempio avessi $\sin x \le \frac{1}{2}$



$$\frac{5}{6}\pi+2k\pi \le x \le \frac{13}{6}\pi+2k\pi \quad k\in\mathbb{Z}$$

Approccio con il grafico



* $\sqrt{5-2\sin x} \ge 6\sin x - 1$

Condizioni iniziali
$5-2\sin x \ge 0$
cioè $\sin x \le \frac{5}{2}$: è sempre soddisfatta

- Se $6\sin x - 1 < 0$ la disequazione è soddisfatta perchè il 1° membro è positivo e il 2° negativo. Ma $6\sin x - 1 < 0$ è equivalente a $\sin x < \frac{1}{6}$
- Se $6\sin x - 1 \ge 0$ (cioè $\sin x \ge \frac{1}{6}$) la disequazione è equivalente a

$$5-2\sin x \ge 36\sin^2 x - 12\sin x + 1$$

cioè

$36\sin^2 x - 10\sin x - 4 \leq 0$

Pongo per comodità $s := \sin x$ e divido per 2.

Ottengo

$18s^2 - 5s - 2 \leq 0$.

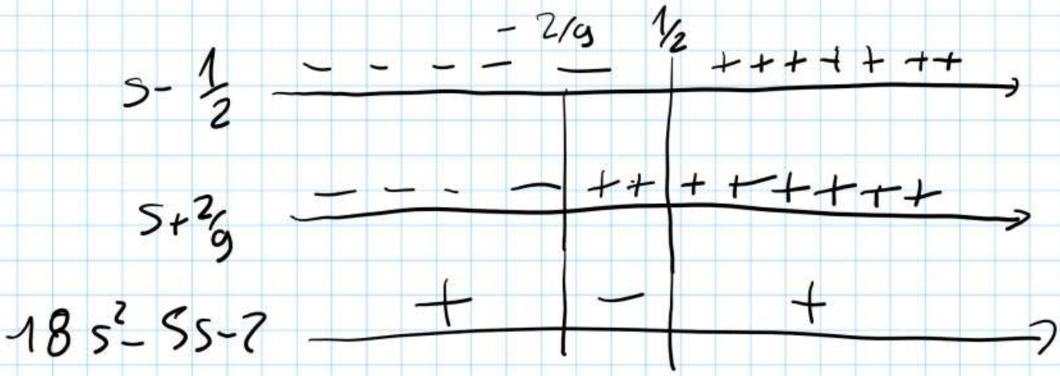
L'equazione associata è

$18s^2 - 5s - 2 = 0$ le cui soluzioni sono

$$s = \frac{5 \pm \sqrt{25+144}}{36} = \frac{5 \pm 13}{36} = \begin{cases} 1/2 \\ -2/9 \end{cases}$$

Pertanto $18s^2 - 5s - 2 = 18\left(s - \frac{1}{2}\right)\left(s + \frac{2}{9}\right)$

Studiando i segni abbiamo

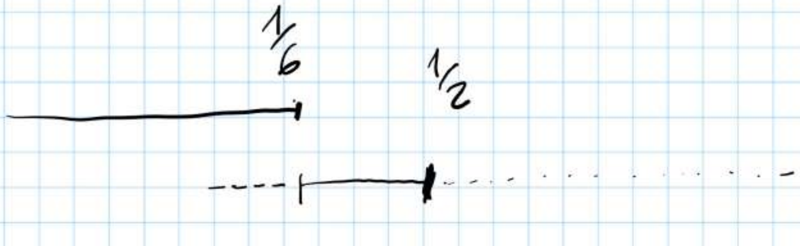


La disequazione era $18s^2 - 5s - 2 \leq 0$ che è soddisfatta per $-\frac{2}{9} \leq s \leq \frac{1}{2}$ cioè $-\frac{2}{9} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$

Riassumendo

se $\sin x < \frac{1}{6}$ la disequazione è soddisfatta

se $\sin x \geq \frac{1}{6}$ la disequazione è soddisfatta se $-\frac{2}{9} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$, dunque se $\frac{1}{6} \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$



Dunque abbiamo tutti i valori minori di $1/6$ e quelli compresi tra $\frac{1}{6}$ e $\frac{1}{2}$ inclusi.

Riassumendo la disequazione è equivalente a $\sin x \leq \frac{1}{2}$ (non dobbiamo cioè studiare $\sin x < \frac{1}{6}$). Le soluzioni sono allora (vedi sopra) $\frac{5}{6}\pi + 2k\pi \leq x \leq \frac{13}{6}\pi + 2k\pi$

Trigonometria (studio dei triangoli)

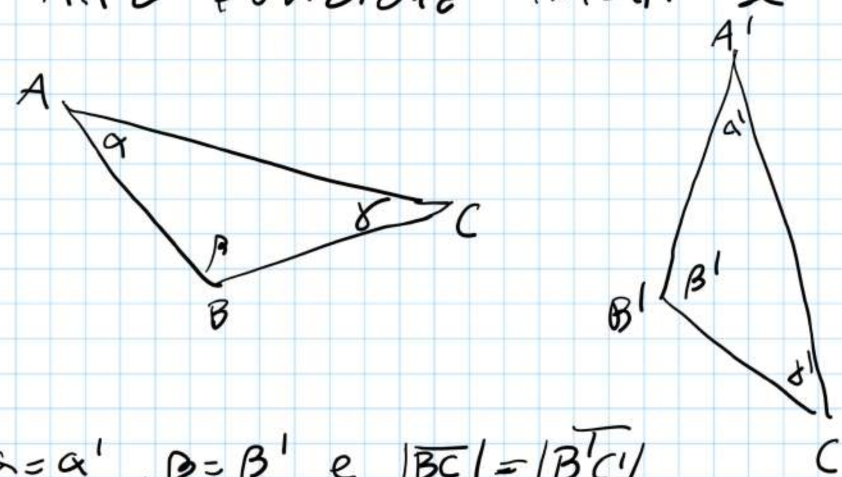
Ricordiamo che in geometria euclidea esistono 3 criteri di congruenza dei triangoli

LAL : due triangoli sono congruenti se hanno congruenti due lati e l'angolo compreso

ALA : due triangoli sono congruenti se hanno congruenti un lato e i due angoli adiacenti

LLL : due triangoli sono congruenti se hanno congruenti i tre lati

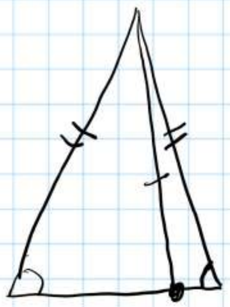
Anche AAL funziona infatti se



e $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ e $|\overline{BC}| = |\overline{B'C'}|$

allora siccome $\gamma = \pi - \alpha - \beta$ e $\gamma' = \pi - \alpha' - \beta'$ si ha che $\gamma = \gamma'$ e posso applicare ALA

Non posso fare LLA: prendo un triangolo isoscele e un punto sulla base diverso dal punto medio: congiungendolo con il vertice opposto ottengo due triangoli non congruenti che hanno due lati e un angolo congruenti



La trigonometria consiste nel calcolare alcuni elementi di un triangolo a partire da alcuni dati. Ad esempio se di un triangolo conosco due lati e l'angolo compreso posso calcolare l'altro lato e gli altri angoli.